# 実空間形から実空間形への平行埋入の特徴付け (等質空間と部分多様体の幾何学)



坊向, 伸隆

数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 131-137



# 実空間形から実空間形への平行埋入の特徴付け

島根大学・総合理工学研究科 D2　坊向 伸隆 (Nobutaka Boumuki)
Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering,
Shimane University

## 1 序文.

$n$ 次元実空間形 $M^n(c)$ とは、断面曲率一定 $c$ を持つ実 $n(\geq 2)$ 次元リーマン多様体のことである。そしてそれは断面曲率が正の場合は球面 $S^n(c)$ に、負の場合は実双曲型空間 $H^n(c)$ に、零の場合はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ にそれぞれ局所的に等長同型である。

ここで O'Neill によって紹介された等方的埋入の定義を思い出す ([O])。リーマン多様体 $M$ からリーマン多様体 $\widetilde{M}$ への等長埋入 $f$ が**等方的埋入**であるとは、$f$ の第二基本形式を $\sigma$ としたとき、任意の点 $p \in M$ と任意の接ベクトル $X(\neq 0) \in T_pM$ に対して、$||\sigma(X,X)||/||X||^2$ が定数になるものを言う。ここで、等方的埋入の典型例として全臍的埋入が挙げられることに注意しておく。

一般に、「実空間形から実空間形への平行埋入は等方的埋入になる。一方、実空間形から実空間形への等方的埋入で平行埋入でないものが無数に存在する。」という事実がある ([Sa, T])。この事実を踏まえて、実空間形から実空間形への平行埋入を等方的埋入および平均曲率ベクトル場 $\mathfrak{h}$ と平均曲率 $\mathrm{H}(= ||\mathfrak{h}||)$ に関する 2 つの不等式で特徴付けた次の定理を本稿で報告する。

**定理**. コンパクトな向き付けられた $n$ 次元実空間形 $M^n(c)$ から $(n+p)$ 次元実空間形 $\widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ への次の 2 条件を満たす等方的埋入 $f$ を考える:

(i) $\mathrm{H}^2 \leq \frac{2(n+1)}{n}c - \tilde{c}$,

(ii) $(1-n)\Delta \mathrm{H}^2 + n\langle \mathfrak{h}, \Delta\mathfrak{h}\rangle \geq 0$.

(ただし、$\Delta$ は $M^n(c)$ 上のラプラシアンを表す。)
$\Rightarrow$ 等方的埋入 $f$ は平行埋入になり、局所的に次のいずれかになる。

(I) $f$ は $M^n(c)$ から $\widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ への全臍的埋入である。
ここで $c \geq \tilde{c}$ であり、$\mathrm{H}^2 = c - \tilde{c}$ となる。

(II) $f$ は次で定義される:
$f = f_2 \circ f_1 : M^n(c) \overset{f_1}{\hookrightarrow} S^{n+\frac{n(n+1)}{2}-1}(\frac{2(n+1)}{n}c) \overset{f_2}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$.
ここで $f_1$ は極小埋入、$f_2$ は全臍的埋入、 $\frac{2(n+1)}{n}c \geq \tilde{c}$ であり、
$\mathrm{H}^2 = \frac{2(n+1)}{n}c - \tilde{c}$ となる。

## 2 準備.

まず本稿で用いる記号についてふれておく。 $(M, f)$ をリーマン多様体 $\widetilde{M}$ の部分多様体とし、$M$、$\widetilde{M}$ のリーマン接続をそれぞれ $\nabla$、$\widetilde{\nabla}$ とするとき、$M$ の接ベクトル場 $X$ と法ベクトル場 $\xi$ に対し、

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi$$

とする。ここで、$-A_\xi X$ は $\widetilde{\nabla}_X \xi$ の $M$ に対する接成分、$D_X\xi$ は法成分を表す。

また、$M$ の接ベクトル場 $X$、$Y$、$Z$ に対し、

$$(\nabla'_X \sigma)(Y, Z) = D_X(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z)$$

とする。そして、$\nabla'\sigma = 0$ なるとき $f$ を**平行埋入**と言う。

さて、定理の証明に用いるために J. Simons による次の補題を準備する。

**補題**([Si]). 実$n(\geq 2)$次元リーマン多様体$M^n$が$(n+p)$次元実空間形$\widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$の部分多様体であるとき、次の方程式が成立する。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 = \|\nabla'\sigma\|^2 - \tilde{c}n^2\mathrm{H}^2 + \tilde{c}n\|\sigma\|^2 + \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle D_{e_i}\Big(D_{e_j}(\sigma(e_k,e_k))\Big), \sigma(e_i,e_j)\rangle \\
+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \Big[2\langle\sigma(e_k,e_j),\sigma(e_i,e_l)\rangle\langle\sigma(e_l,e_k),\sigma(e_i,e_j)\rangle \\
- 2\langle\sigma(e_k,e_j),\sigma(e_k,e_l)\rangle\langle\sigma(e_l,e_i),\sigma(e_i,e_j)\rangle \\
+ \langle\sigma(e_k,e_k),\sigma(e_i,e_l)\rangle\langle\sigma(e_l,e_j),\sigma(e_i,e_j)\rangle \\
- \langle\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_l,e_k)\rangle\langle\sigma(e_l,e_k),\sigma(e_i,e_j)\rangle\Big],
\end{aligned}
$$

ただし、$\Delta$は$M^n$上のラプラシアンを表し、$\{e_1,\cdots,e_n\}$は$M^n$上の局所正規直交標構の場を表す。

## 3 定理の証明.

定理の埋入$f$が実空間形$M^n(c)$から実空間形$\widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$への等方的埋入であることと先ほどの補題を用いて、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 =& \|\nabla'\sigma\|^2 - \frac{n^3(n-1)}{n+2}(\mathrm{H}^2 - c + \tilde{c})\left(\mathrm{H}^2 - \frac{2(n+1)}{n}c + \tilde{c}\right) \\
&+ n\big((1-n)\Delta\mathrm{H}^2 + n\langle\mathfrak{h},\Delta\mathfrak{h}\rangle\big)
\end{aligned}
$$

なる式を得ることができる。

ここで、$\mathrm{H}^2 - c + \tilde{c} = \frac{n+2}{n}\|\sigma(X,Y)\|^2 \geq 0$ (ただし、$X,Y$は互いに直交するベクトル) なので、定理の条件 (i) と (ii) より Hopf の補題から第二基本形式$\sigma$が平行$(\nabla'\sigma = 0)$となる。さらに、$\mathrm{H}^2 \equiv c - \tilde{c}$ または $\mathrm{H}^2 \equiv \frac{2(n+1)}{n}c - \tilde{c}$ となり、D. Ferus による平行部分多様体の分類定理([F]) から、結論を得る。□

この定理の系として次を得る。

**系**. コンパクトな向き付けられた$n$次元実空間形$M^n(c)$から$(n+p)$次元実空間形$\widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ への次の2条件を満たす等方的埋入$f$を考える:

(i) $\mathrm{H}^2 \leq \frac{2(n+1)}{n}c - \tilde{c}$,

(ii)$'$ 平均曲率ベクトル場$\mathfrak{h}$は平行$(D\mathfrak{h} = 0)$である。

$\Rightarrow$ 等方的埋入$f$は平行埋入になり、局所的に次のいずれかになる。

(I) $f$は$M^n(c)$から$\widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$への全臍的埋入である。
ここで$c \geq \tilde{c}$であり、$\mathrm{H}^2 = c - \tilde{c}$となる。

(II) $f$は次で定義される:
$f = f_2 \circ f_1 : M^n(c) \overset{f_1}{\hookrightarrow} S^{n+\frac{n(n+1)}{2}-1}(\frac{2(n+1)}{n}c) \overset{f_2}{\hookrightarrow} \widetilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$.
ここで$f_1$は極小埋入、$f_2$は全臍的埋入、$\frac{2(n+1)}{n}c \geq \tilde{c}$であり、$\mathrm{H}^2 = \frac{2(n+1)}{n}c - \tilde{c}$となる。

## 4 注意.

定理の条件 (ii) や系の条件 (ii)$'$ をそれぞれとるとこれらの結果は成立しないことを示す。(論文 On some isotropic submanifolds in spheres, Proc. Japan Acad. Ser. A 77(2001), 173-175. を参照)

**例**

$\mathcal{X}_1 : S^n\big(n/\big(2(n+1)\big)\big) \longrightarrow S^{n+(n(n+1)/2)-1}(1)$ を第二標準極小埋入とし、
$\mathcal{X}_2 : S^n\big(n/\big(2(n+1)\big)\big) \longrightarrow S^n\big(n/\big(2(n+1)\big)\big)$ を恒等写像とする。

これらの埋入を使って、各$t \in (0, \pi/2)$に対して、次の極小埋入$\mathcal{X}_t$を定義する。

(A) $\mathcal{X}_t\,(=(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)) : S^n\big(\frac{n}{2(n+1)}\big) \longrightarrow S^{n+\frac{n(n+1)}{2}-1}\big(\frac{1}{\cos^2 t}\big) \times S^n\big(\frac{n}{2(n+1)\sin^2 t}\big)$.

ここで、写像 $\mathcal{X}_t$ の微分 $(\mathcal{X}_t)_*$ は、$S^n\big(n/(2(n+1))\big)$ の接ベクトル $X$ に対し、

$$(\mathcal{X}_t)_*X = (\cos t\cdot(\mathcal{X}_1)_*X, \sin t\cdot(\mathcal{X}_2)_*X)$$

で与えられている。(A) での球面の積を Clifford hypersurface として球面に埋蔵する。即ち、

(B) $S^{n+\frac{n(n+1)}{2}-1}\big(\frac{1}{\cos^2 t}\big)\times S^n\big(\frac{n}{2(n+1)\sin^2 t}\big)\longrightarrow S^{n+\frac{n(n+3)}{2}}\big(\frac{n}{n+(n+2)\sin^2 t}\big)$.

そして、(A) と (B) を組み合わせて次の等長埋入 $f_t$ を得る。

(C) $f_t : S^n\big(\frac{n}{2(n+1)}\big)\longrightarrow S^{n+\frac{n(n+3)}{2}}\big(\frac{n}{n+(n+2)\sin^2 t}\big)$.

上の埋入 $f_t$ は各 $t\in(0,\pi/2)$ に対して、次の性質を持つことが既に示されている。

$(a)$ $f_t$ の平均曲率 $\mathrm{H}_t$ は

$$\mathrm{H}_t = ||\mathfrak{h}_t|| = \frac{(n+2)\sin t\cos t}{\sqrt{2(n+1)(n+(n+2)\sin^2 t)}} \neq 0$$

で与えられる。

$(b)$ $f_t$ の平均曲率ベクトル場 $\mathfrak{h}_t$ は平行ではない。$\mathfrak{h}_t$ の微分の長さは

$$||D\mathfrak{h}_t||^2 = \frac{n(n+2)^2}{4(n+1)^2}\sin^2 t\cos^2 t \neq 0$$

で与えられる。

$(c)$ $f_t$ は $\lambda_t$-等方的埋入であり、しかも、$\lambda_t$ は定数で、次で与えられる。

$$\lambda_t = \sqrt{\cos^4 t\frac{n-1}{n+1} + \frac{(\tilde{c}_1\cos^2 t - \tilde{c}_2\sin^2 t)^2}{\tilde{c}_1+\tilde{c}_2}} \neq 0.$$

ただし、$\tilde{c}_1 := \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $\tilde{c}_2 := \dfrac{n}{2(n+1)\sin^2 t}$ である。

今、特に $\cos t = 1/\sqrt{n+1}$, $\sin t = \sqrt{n/(n+1)}$ と置いた場合を考えると、次の等長埋入 $f$ を得る。

$$(d) \quad f : S^n\left(\frac{n}{2(n+1)}\right) \longrightarrow S^{n+\frac{n(n+1)}{2}-1}(n+1) \times S^n\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow S^{n+\frac{n(n+3)}{2}}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right).$$

ここで、$(d)$ で与えた等長埋入 $f$ は定理の条件 (i) を満たすが、定理の条件 (ii) は満たさない。実際、

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{H}^2 - \tfrac{2(n+1)}{n}c + \widetilde{c} = \tfrac{(n+2)^2}{2(2n+3)(n+1)^2} - 1 + \tfrac{n+1}{2n+3} = -\tfrac{n(n+2)}{2(n+1)^2} < 0,$$

$$\text{(ii)} \qquad (1-n)\Delta \mathrm{H}^2 + n\langle \mathfrak{h}, \Delta\mathfrak{h}\rangle = n\langle \mathfrak{h}, \Delta\mathfrak{h}\rangle = -n||D\mathfrak{h}||^2 = -\tfrac{n^3(n+2)^2}{4(n+1)^4} < 0.$$

これは定理の条件 (ii) がないと定理が成立しないことを示している。

## 参考文献


[B] N. Boumuki, Isotropic immersions and parallel immersions of space forms into space forms, to appear in Tsukuba J. Math..

[F] D. Ferus, Immersions with parallel second fundamental form, Math. Z. 140(1974), 87-92.

[M] S. Maeda, On some isotropic submanifolds in spheres, Proc. Japan Acad. Ser. A 77(2001), 173-175.

[O] B. O'Neill, Isotropic and Kähler immersions, Canad. J. Math. 17(1965), 905-915.

[Sa] K. Sakamoto, Planar geodesic immersions, Tôhoku Math. J. 29(1977), 25-56.

[Si] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. Math. 88(1968), 62-105.

[T] K. Tsukada, Helical geodesic immersions of compact rank one symmetric spaces, Tokyo J. Math. 6(1983), 267-285.

Nobutaka Boumuki, Department of Mathematics, Shimane University, Matsue 690-8504, Japan, e-mail : boumuki@math.shimane-u.ac.jp